Boolesche Algebra

In Programmen und Algorithmen werden fast immer an einigen Stellen Bedingungen eingebaut, die sich zu einem Wahrheitswert (Wahr oder Falsch) auswerten lassen. Von diesem Ergebnis werden dann die weiteren Schritte im Ablauf beeinflusst. Hängt das weitere Vorgehen von mehreren Bedingungen ab, so müssen diese passend miteinander verknüpft werden. Diese Verknüpfungen können mit *und* ($\wedge$) und *oder* ($\vee$) gemacht werden, die zusammen mit dem *nicht* ($\neg$) die Verknüpfungen der Booleschen Algebra bilden. Diese geht auf den englischen Mathematiker und Logiker George Boole (1815 bis 1864) zurück.

Die Ergebnisse dieser Verknüpfungen lassen sich mit folgenden Tabellen beschreiben:

und ($\wedge$)	Falsch	Wahr
Falsch	Falsch	Falsch
Wahr	Falsch	Wahr

oder ($\vee$)	Falsch	Wahr
Falsch	Falsch	Wahr
Wahr	Wahr	Wahr

nicht ($\neg$)	
Falsch	Wahr
Wahr	Falsch

Verknüpft man mehr als zwei Bedingungen ist es hilfreich, eine Tabelle mit allen Möglichkeiten zu erstellen und diese zu überprüfen, ob die Verknüpfung das gewünschte Ergebnis hat. Dabei sollte man zur besseren Übersicht die komplette Verknüpfung in die einzelnen Elemente zerlegen. Als Beispiel dient hier $(a \vee \neg b) \wedge c$, bei dem zuerst $\neg b$ sowie $a \vee \neg b$ ausgewertet werden. Dieses lässt sich in einer Tabelle abbilden:

a	b	c	$\neg b$	$a \vee \neg b$	$(a \vee \neg b) \wedge c$
F	F	F	W	W	F
W	F	F	W	W	F
F	W	F	F	F	F
W	W	F	F	W	F
F	F	W	W	W	W
W	F	W	W	W	
F	W	W	F		
W	W	W			

Um bei den Möglichkeiten keine zu vergessen, sollte man, wie auch hier durchgeführt, nach einem System vorgehen: Die erste Spalte wechselt in Einerschritten zwischen Falsch und Wahr, die zweite in Zweierschritten und die dritte Spalte in Viererschritten. Entsprechend wäre eine vierte mit Achterschritten.

Aufgabe 1
Vervollständige die obere Tabelle.

Aufgabe 2
Erstelle eine Tabelle für die Bedingung $(\neg a \vee b) \wedge ((c \wedge d) \vee a)$.

Regeln innerhalb der Booleschen Algebra

Genauso wie die im Mathematikunterricht angewandten Algebra gibt es auch in der Booleschen Algebra bestimmte Gesetze, um die als Formeln dargestellten Bedingungen umzuschreiben und ggf. zu vereinfachen.

Kommutativgesetze	$a \wedge b = b \wedge a$	$a \vee b = b \vee a$
Assoziativgesetze	$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$	$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
Idempotenzgesetze	$a \wedge a = a$	$a \vee a = a$
Distributivgesetze	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
Komplementärgesetze	$a \wedge \neg a = F$	$a \vee \neg a = W$
Neutralitätsgesetze	$a \wedge W = a$	$a \vee F = a$
Absorptionsgesetze	$a \vee (a \wedge b) = a$	$a \wedge (a \vee b) = a$

Aufgabe 3

Zeige anhand von Tabellen, dass die Distributivgesetze und die Komplementärgesetze stimmen.

Aufgabe 4

Vereinfache den folgenden Ausdruck $(b \wedge \neg c) \vee a \vee (b \wedge c)$ durch die Anwendung der Gesetze der Booleschen Algebra.

Die De Morganschen Regeln oder De Morganschen Gesetze geben das Zusammenspiel zwischen der Negation sowie *und* und *oder* wieder. So lassen sich zwei verneinte Angaben, die mit einem *und* verknüpft sind auch direkt mit einem *oder* verknüpfen und der gesamte Ausdruck dann verneinen: $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$. Analog gilt für *oder* $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$.

Aufgabe 5

In elektrischen Schaltungen werden in der Regel ein NichtUnd (NAND), ein NichtOder (NOR) und ein Nicht verbaut, da diese sich besser realisieren lassen als *und* und *oder*. Nutze die De Morganschen Regeln um zu zeigen, wie sich damit ein *oder* mit einem *NAND* realiseren lässt.

nichtUnd (NAND)	Falsch	Wahr
Falsch	Wahr	Wahr
Wahr	Wahr	Falsch

nichtOder (NOR)	Falsch	Wahr
Falsch	Wahr	Falsch
Wahr	Falsch	Falsch

Lösungen

Lösung 1

a	b	c	$\neg b$	$a \vee \neg b$	$(a \vee \neg b) \wedge c$
F	F	F	W	W	F
W	F	F	W	W	F
F	W	F	F	F	F
W	W	F	F	W	F
F	F	W	W	W	W
W	F	W	W	W	W
F	W	W	F	F	F
W	W	W	F	W	W

Lösung 2

a	b	c	d	$\neg a$	$c \wedge d$	$(\neg a \vee b)$	$(c \wedge d) \vee a$	$(\neg a \vee b) \wedge ((c \wedge d) \vee a)$
F	F	F	F	W	F	W	F	F
W	F	F	F	F	F	F	W	F
F	W	F	F	W	F	W	F	F
W	W	F	F	F	F	W	W	W
F	F	W	F	W	F	W	F	F
W	F	W	F	F	F	F	W	F
F	W	W	F	W	F	W	F	F
W	W	W	F	F	F	W	W	W
F	F	F	W	W	F	W	F	F
W	F	F	W	F	F	F	W	F
F	W	F	W	W	F	W	F	F
W	W	F	W	F	F	W	W	W
F	F	W	W	W	W	W	W	W
W	F	W	W	F	W	F	W	F
F	W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	W	W	F	W	W	W	W

Lösung 3

a	b	c	$b \vee c$	$a \wedge b$	$a \wedge c$	$a \wedge (b \vee c)$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
F	F	F	F	F	F	F	F
W	F	F	F	F	F	F	F
F	W	F	W	F	F	F	F
W	W	F	W	W	F	W	W
F	F	W	W	F	F	F	F
W	F	W	W	F	F	W	F
F	W	W	W	F	F	F	F
W	W	W	W	W	W	W	W

a	b	c	$b \wedge c$	$a \vee b$	$a \vee c$	$a \vee (b \wedge c)$	$(a \vee b) \wedge (a \vee c)$
F	F	F	F	F	F	F	F
W	F	F	F	W	W	W	W
F	W	F	F	W	F	F	F
W	W	F	F	W	W	W	W
F	F	W	F	F	W	F	F
W	F	W	F	W	W	W	W
F	W	W	W	W	W	W	W
W	W	W	W	W	W	W	W

a	$\neg a$	$a \wedge \neg a$	$a \vee \neg a$
F	W	F	W
W	F	F	W

Lösung 4

$(b \wedge \neg c) \vee a \vee (b \wedge c)$
$a \vee (b \wedge c) \vee (b \wedge \neg c)$ Kommutativgesetz
$a \vee b \vee (c \wedge \neg c)$ Distributivgesetz
$a \vee b \vee F$ Komplementärgesetz
$a \vee b$ Neutralitätsgesetz

Lösung 5

$a \vee b = \neg a$ NAND $\neg b$